(A) Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-δ.χ. E, όπου $\dim E < \infty$. Τότε ο f διαγωνοποιείται ανν $\exists$ βάση $\mathcal{B}$ του E τ.ω. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ να είναι διαγώνιος

(B) Ένας $n \times m$ πίνακας $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται διαγωνοποιήσιμος ανν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα $\exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P τ.ω. $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος

#Υπενθύμιση

Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, τότε ορίζεται ο ενδομορφισμός $f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$,
$f_A(x) = Ax$. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$, $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ κανονική βάση του $\mathbb{K}$

Πρόταση

Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, τότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ ο ενδομορφισμός f_A είναι διαγωνοποιήσιμος

Απόδειξη

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι ο f_A είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε $\exists$ μια βάση $C = \{E_1, \dots, E_n\}$ του $\mathbb{K}^n$: $M_C^C(f_A) = B$ διαγώνιος. Επειδή

$M_B^C(f_A) \overset{\text{op}}{=} A$, έπεται ότι ο πίνακες A κ' B είναι όμοιοι, διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμ. απεικόνισης ως προς διαφορετικές βάσεις. Τότε $\exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P = M_B^C$: $P^{-1}AP = B$. Άρα από τον ορισμό ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

($\Rightarrow$) Έστω ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P = M_B^C$: $P^{-1}AP = B$, διαγώνιος.

Έστω $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ όπου $\lambda_i \in K$ $1 \le i \le k$. Θέτουμε $\forall i = 1, \dots, n$ $\varepsilon_i' = P \cdot \varepsilon_i$.

Έστω $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$, τότε $\varepsilon_i' = P\varepsilon_i = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix}$

Ισχυρισμός

Το σύνολο $C = \{\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n'\}$ βάση του K^n.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1 \varepsilon_1' + \dots + \lambda_n \varepsilon_n' = 0 \Rightarrow \lambda_1 P\varepsilon_1 + \dots + \lambda_n P\varepsilon_n = 0 \Rightarrow P(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) = 0 \Rightarrow P^{-1}P(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \lambda_n) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) = 0 \overset{\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \text{ βάση}}{\Rightarrow}$ $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Άρα C Γ.Α. Επομένως C βάση του K^n

Συνέχεια Προηγούμενης Απόδειξης

$f_A(\varepsilon_i') = A\varepsilon_i' = AP\varepsilon_i = PB\varepsilon_i =$

$P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} p_{1i}\lambda_i \\ \vdots \\ p_{ni}\lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix} = \lambda_i \varepsilon_i' \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$M_C^C(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = B$ διαγώνιος.

- Αν $y=0$ τότε $x=\lambda y=\lambda 0=0$. Άρα $(x,y)=(0,0)$ Άτοπο
- Αν $\lambda^2+1=0$ Άτοπο

Άρα η f δεν έχει καμία ιδιοτιμή στο $\mathbb{R}$.

2) $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με $f(x,y)=(-\omega, z)$. Όπως προηγουμένως

$\begin{cases} \lambda z=-\omega \\ \lambda\omega = z \end{cases}$, όπου $\lambda, z, \omega \in \mathbb{C}$.
- $(\lambda^2+1)\omega=0 \to \omega=0$ Άτοπο

$\to \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$. Άρα στο $\mathbb{C}$ η f έχει 2 ιδιοτιμές, $\pm i$

3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(4x-y, 2x+y)$ Έστω λ ιδιοτιμή του f. Τότε $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)\neq(0,0)$ τ.ω. $f(x,y)=\lambda(x,y) \Rightarrow$

$(4x-y, 2x+y)=(\lambda x, \lambda y) \Rightarrow \begin{cases} \lambda y = 2x+y \\ \lambda x = 4x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda-1)y=2x \\ (\lambda-4)x=-y \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} (4-\lambda)x=y \\ (1-\lambda)y=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x=y \\ (6-\lambda-4\lambda+\lambda^2)x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x=y \\ (\lambda^2-5\lambda+6)x=0 \end{cases}$

- Αν $x=0$ τότε $(4-\lambda)\cdot 0=y \Rightarrow y=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$ Άτοπο
- Αν $\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=3$ ή $\lambda_2=2$

Τότε $f(1,1)=3(1,1)$ κ' $f(1,2)=2(1,2)$

$\Rightarrow (1,1)$ ιδιοδιανύσματα του f που αντιστοιχεί στην $\lambda=3$
$\Rightarrow (1,2)$ » » » » $\lambda=2$

Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$ $C=\{(1,1),(1,2)\}$ βάση του $\mathbb{R}^2$

$M_C^C(f)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Διαγωνοποιήσιμη η βάση της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ⓐ Αν λ ιδιοτιμή του ενδομορφισμού $f: E\to E$ τότε $\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda)\geq 1$ ($\exists$ τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα του $V(\lambda)$)

Ⓑ Το 0 είναι ιδιοτιμή του f αν $\exists \vec{x}\in E: \vec{x}\neq\vec{0}: f(\vec{x})=0\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \exists \vec{x}\in E, \vec{x}\neq\vec{0}: \vec{x}\in Ker(f) \Leftrightarrow Ker(f)\neq\{\vec{0}\} \Leftrightarrow f$ δεν είναι μονομορφισμός $\Leftrightarrow f$ δεν είναι ισομορφισμός $\Leftrightarrow$ ο πίνακας της f ως προς την τυχούσα βάση B δεν είναι

Επομένως, ο f_A είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

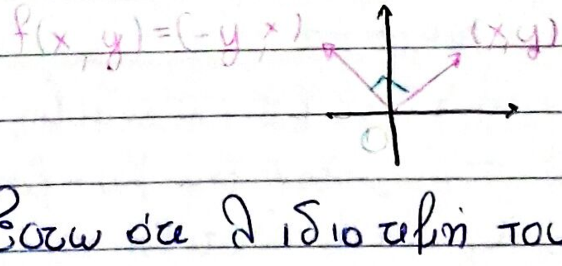
Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-δ.χ. E. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ θα καλείται ιδιοτιμή του $f \iff \exists \vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}$ $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
Το (μη-μηδενικό) διάνυσμα $\vec{x}$ καλείται τότε ιδιοδιάνυσμα του f το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.
Ο ιδιοχώρος του E ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ ορίζεται να είναι το σύνολο $V(\lambda) = \{\vec{x} \in E \mid \vec{x} \neq \vec{0}$ κ' $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\} \cup \{\vec{0}\}$ $= \{$Ιδιοδιανύσματα του E τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda\} \cup \{\vec{0}\} = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν λ ιδιοτιμή του ενδομορφισμού $f: E \to E$ τότε ο ιδιοχώρος $V(\lambda)$ είναι ένας υπόχωρος του E κ' επιπλέον $f(V(\lambda)) \subseteq V$, δηλ. $\forall \vec{x} \in V(\lambda): f(\vec{x}) \in V(\lambda)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προφανώς $\vec{0} \in V(\lambda)$, αν $\vec{x}, \vec{y} \in V(\lambda)$, τότε $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, $f(\vec{y}) = \lambda \vec{y}$,
$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y} = \lambda(\vec{x} + \vec{y}) \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V(\lambda)$
Αν $k \in \mathbb{K}$ κ' $\vec{x} \in V(\lambda)$, τότε $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ κ' τότε $f(k\vec{x}) = k f(\vec{x}) = k \lambda \vec{x} = \lambda(k\vec{x}) \Rightarrow k\vec{x} \in V(\lambda)$. Άρα $V(\lambda)$ υπόχωρος του E. Τέλος, έστω $\vec{x} \in V(\lambda)$. Τότε $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Rightarrow f(f(\vec{x})) = f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \Rightarrow$ $f(\vec{x}) \in V(\lambda)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (-y, x)$. Έστω ότι λ ιδιοτιμή του f. Τότε $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$. $f(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow (-y, x) = (\lambda x, \lambda y) =$
$= \begin{cases} \lambda x = -y \\ \lambda y = x \end{cases} \Rightarrow \lambda \lambda y = -y \Rightarrow \lambda^2 y + y = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1) y = 0$

αντιστρέψιμος <=> $\forall$ βάση B του E $|M_B^B(f)| = 0$. Τελικά, 0 ιδιοτιμή του f <=> $\forall$ βάση B του E: $|M_B^B(f)| = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $f: E \to E$ ένα ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-δ.χ. E όπου $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$, τότε η ορίζουσα του f ορίζεται να είναι $\det(f) = |M_B^B(f)|$, όπου B τυχαία βάση του E.

Αν C μια άλλη βάση του E κ' έστω $M_C^C(f)$. Τότε $|M_B^B(f)| = |M_C^C(f)|$. Τότε οι πίνακες $M_B^B(f)$ $M_C^C(f)$ είναι όμοιοι =>

$\exists$ αντιστρέψιμος $P = M_B^B = P^{-1} M_B^{B'}(f) P = M_C^C(f)$ =>

$|P^{-1} M_B^B(f) P| = |P^{-1}||M_B^B(f)||P| = |P|^{-1}|M_B^B(f)||P| =$

$|M_B^B(f)| = |M_C^C(f)|$